10.8 Oscillation d'une tige mince

Le moment de force agissant sur une tige mince dont le pivot est à une distance h de son centre de masse est

$$\tau = -mgh\sin\theta. \tag{10.21}$$

Puisque le moment de force sur un solide est donné par

$$\tau = I\alpha, \tag{10.22}$$

on peut poser l'égalité suivante et obtenir l'équation différentielle correspondante

$$-mgh\sin\theta = I\alpha$$

$$\alpha + \frac{mgh}{I}\sin\theta = 0$$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{mgh}{I}\sin\theta = 0. \tag{10.23}$$

Cette équation est non linéaire et ne peut se résoudre algébriquement. Afin d'obtenir une équation différentielle linéaire représentant un mouvement harmonique simple, on utilise l'approximation des petits angles, $\theta \approx \sin\theta$, où θ est exprimé en radians.

Le tableau 10.3 montre la précision de cette approximation pour des angles allant jusqu'à 60°.

En remplaçant $\sin\theta$ par θ, l'équation 10.23 devient

$$\boxed{\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{mgh}{I}\theta = 0.} \tag{10.24}$$

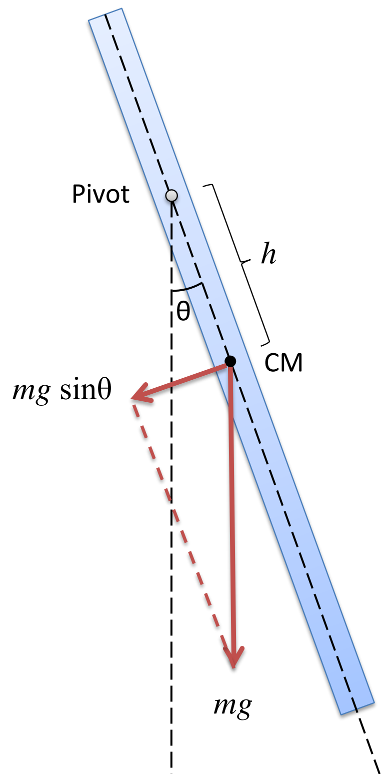

Figure 10.13 – *Diagramme de forces d'une tige oscillante.*

Tableau 10.3 – *Tableau comparatif pour l'approximation des petits angles.*

degrés	radians	$\sin\theta$	écart %
10	0,1745	0,1736	0,5%
20	0,3491	0,3420	2,1%
30	0,5236	0,5000	4,7%
40	0,6981	0,6428	8,6%
50	0,8727	0,7660	13,9%
60	1,0472	0,8660	20,9%

L'équation (10.24) a comme solution

$$\theta = A\cos\left(\sqrt{\frac{mgh}{I}}t\right) \tag{10.25}$$

où A est l'amplitude de l'oscillation. Lorsqu'une oscillation est complète, l'argument du cosinus a parcouru 2π. La période T de cette oscillation est donc

$$2\pi = \sqrt{\frac{mgh}{I}}T$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgh}}. \tag{10.26}$$

Pour une tige mince de masse M et longueur L, le moment d'inertie lorsque le pivot est au centre de masse est donné par

$$I_{CM} = \frac{1}{12}ML^2. \tag{10.27}$$

En utilisant le théorème des axes parallèles, on peut trouver le moment d'inertie de la tige lorsque le pivot est à une distance h du centre de masse

$$I = I_{CM} + Mh^2$$

$$I = \frac{1}{12}ML^2 + Mh^2 \tag{10.28}$$

En remplaçant I dans l'equation 10.26, on obtient

$$\boxed{T = 2\pi\sqrt{\frac{\frac{1}{12}L^2 + h^2}{gh}}.} \tag{10.29}$$

Cette fonction, $T = f(h)$, est tracée ci-dessous pour une tige de longueur $L = 1,22$ m. On remarque que cette fonction a un minimum à $\sim 0,35$ m. Une tige de 1,22 m oscillera donc plus rapidement si le pivot est placé à 35 cm de son centre de masse plutôt qu'à son extrémité. Cette distance variera en fonction de la longueur de la tige.

En approchant le pivot du centre de masse, la période augmente. La fonction est asymptotique. Lorsque le pivot est au centre de masse la période est infinie. Il n'y a donc plus d'oscillation.

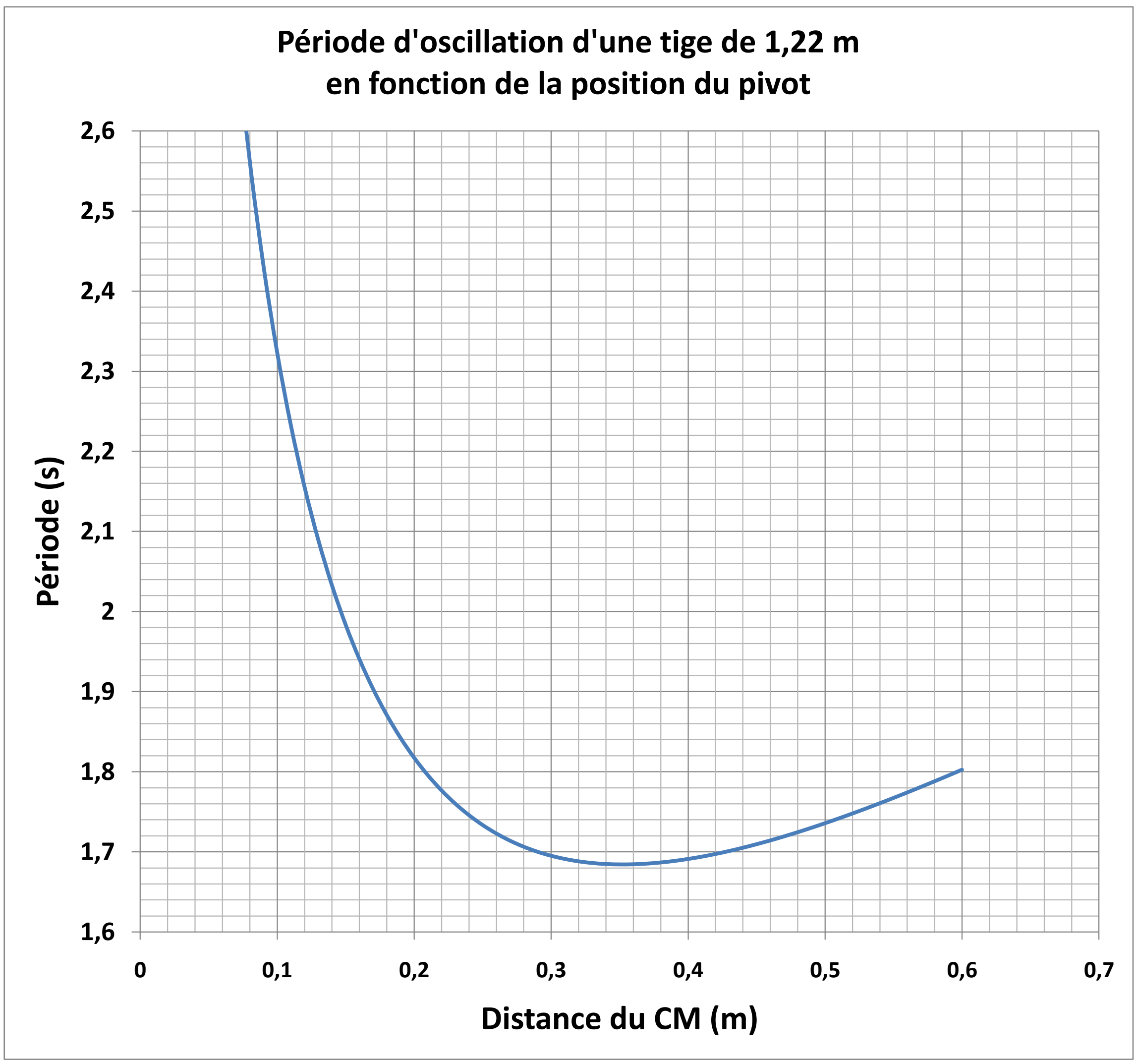

Figure 10.14 – *Graphique de la période d'oscillation d'une tige mince en fonction de la position du pivot.*